Системы логических уравнений.

Оглавление

После появления задачи, связанной с решением систем логических уравнений на ЕГЭ-2011, вышли несколько печатных материалов, посвященных этой теме[1]. В данной работе рассматриваются уравнения и системы логических уравнений, встречавшиеся в тренировочных , диагностических и экзаменационных (ЕГЭ) работах по информатике (разработка ФИПИ и МИОО). Сделана попытка небольшой классификации систем, хотя не все встречающиеся уравнения и системы уравнений удалось классифицировать.

Во всех рассматриваемых задачах стоит вопрос о нахождении количества различных решений систем логических уравнений (или одного логического уравнения). При этом оговаривается, что приводить сами решения не требуется, достаточно определить количество различных решений.

При записи задач используются следующие обозначения:

- 1 – true, 0 – false;
- знак ‘·’ означает конъюнкцию, знак ‘+’ – дизъюнкцию,
- знак ‘→’ – импликацию,
- знак ‘≡’ – эквиваленцию, знак ‘⊕’ – сложение по модулю 2,
- черта сверху означает отрицание.

Замечание о замене переменных.

Сколько решений имеет уравнение $(A \to B) + (C \to D) = 1$, где A, B, C, D – логические переменные?

Обсуждение. Конечно, здесь всего 4 переменных и можно легко составить таблицу истинности (всего 16 строк). Но давайте введем новые переменные $X = A \to B$ и $Y = C \to D$. С учетом введенных переменных уравнение запишется $X + Y = 1$.

Дизъюнкция верна в трех случаях: $(0; 1)$, $(1; 0)$ и $(1; 1)$. Каждая из переменных является импликацией, т.е. является истинной (значение 1) в трех случаях и ложной (значение 0) – в одном случае. Поэтому случай $(0; 1)$ будет соответствовать трем $(3 \cdot 1 = 3)$ возможным сочетаниям параметров исходного уравнения, случай $(1; 0)$ также будет соответствовать трем возможным сочетаниям параметров. А случай $(1; 1)$ – будет соответствовать девяти $(3 \cdot 3 = 9)$ возможным сочетаниям параметров исходного уравнения. Значит, всего возможно 15 (3+3+9) различных решений указанного уравнения.

Указанный пример показывает, что надлежащая замена переменных может существенно упростить решение поставленной задачи.

---

[1] Известные мне работы:
1. Глинка Н.В., Некоторые способы решения задач, связанные с системами логических уравнений, Потенциал, №№11-12, 2011
2. Поляков К.Ю., Системы логических уравнений, Информатика, №14-2011

Задачи, содержащие импликацию или ее эквивалентную запись.

Пример. Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} \overline{x_1} + x_2 = 1 \\ \overline{x_2} + x_3 = 1 \\ \dots \\ \overline{x_{m-1}} + x_m = 1 \end{cases}$$

, где $x_1, x_2, \dots, x_m$ – логические переменные.

Замечание. Приведенная система уравнений равносильна уравнению

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot \dots \cdot (x_{m-1} \rightarrow x_m) = 1.$$

Ответ: $m + 1$

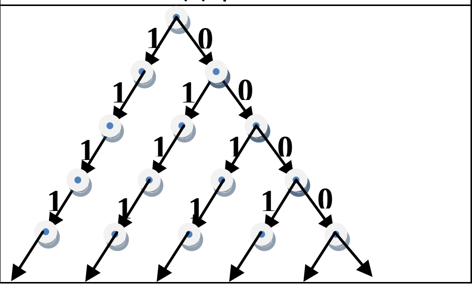
Решение. Пусть x_1 – истинно ($x_1 = 1$), тогда из первого уравнения (из первой импликации) получаем, что x_2 также истинно ($\overline{x_1} = 0$, поэтому для выполнения уравнения необходимо, чтобы $x_2 = 1$). Далее, из второго уравнения получаем, что x_3 истинно ($x_3 = 1$), и т.д. до $x_m = 1$. Значит, набор $(1; 1; \dots; 1)$ из m единиц является решением системы.

Пусть теперь x_1 – ложно ($x_1 = 0$), тогда из первого уравнения следует, что x_2 может быть как истинным, так и ложным, т.е. может принимать значения как 0, так и 1.

В случае, если x_2 истинно ($x_2 = 1$) получаем, что остальные переменные также истинны (все равны единице), т.е. набор $(0; 1; 1; \dots; 1)$ является решением. В случае, когда x_2 – ложно ($x_2 = 0$) получаем, что для x_3 есть две возможности, 0 и 1. И так далее. Продолжая так до последней переменной, получаем, что решениями уравнения являются следующие наборы переменных ($m + 1$ решение, в каждом решении по m значений переменных):

$$(1; 1; 1; \dots; 1)$$
$$(0; 1; 1; \dots; 1)$$
$$(0; 0; 1; \dots; 1)$$
$$\dots$$
$$(0; 0; 0; \dots; 0)$$

Такой подход хорошо иллюстрируется при помощи построения дерева. Получив одну единицу, все остальные значения переменных также становятся единицами, получив же ноль, возможны два варианта: 0 и 1. Для одного уравнения дерево состоит из двух уровней, для двух уравнений добавляется одна переменная и соответственно один уровень дерева. Количество возможных решений – количество различных ветвей построенного дерева. Легко видеть, что оно равно $m + 1$. На рисунке приведено дерево на 5 уровней.

<table>
<tr><th>Переменные</th><th>Дерево</th><th>Количество решений</th></tr>
<tr><td>x_1</td><td rowspan="5">
</td><td></td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x_3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>x_4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>

В случае трудностей в рассуждениях и построении дерева решений можно искать решение с использованием таблиц истинности, для одного – двух уравнений. Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 = 1 \\ x_2 \rightarrow x_3 = 1 \\ \dots \\ x_{m-1} \rightarrow x_m = 1 \end{cases}$$

и составим таблицы истинности отдельно для одного и для двух уравнений.

x_1	x_2	$(x_1 \to x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	x_3	$x_1 \to x_2$	$x_2 \to x_3$	$(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Далее можно увидеть, что одно уравнение истинно в следующих трех случаях: $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$.

Система двух уравнений истинна в четырех случаях $(0;0;0)$, $(0;0;1)$, $(0;1;1)$, $(1;1;1)$.

При этом сразу видно, что существует решение, состоящее из одних нулей и еще m решений, в которых добавляется по одной единице, начиная с последней позиции до заполнения всех возможных мест.

Можно предположить, что общее решение будет иметь такой же вид. Хотя это, конечно, <u>не решение,</u> но ответ таким образом угадать можно. Для того, чтобы такой подход стал решением, требуется доказательство, что предположение верно.

Многие задачи, встречающиеся в различных источниках (варианты ЕГЭ, пробные экзамены и т.п.) сводятся к рассмотренной задаче (как правило, при использовании подходящей замены).

1. Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \overline{x_2} = 1 \\ x_2 + \overline{x_3} = 1 \\ \dots \\ x_9 + \overline{x_{10}} = 1 \end{cases}$$

, где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ – логические переменные.

Ответ: 11.

Указание. Замена переменных $y_i = \overline{x_i}$, $i = \overline{1,10}$ сводит задачу к разобранному примеру.

2. Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_4)(x_4 \to x_5) = 1 \\ (y_1 \to y_2)(y_2 \to y_3)(y_3 \to y_4)(y_4 \to y_5) = 1 \end{cases}$$

, где x_i, y_i, $i = \overline{1,5}$ – логические переменные.

Ответ: 36

Указание. Поскольку уравнения системы не зависят друг от друга, их можно решать отдельно.

Первое уравнение равносильно системе $\begin{cases} \overline{x_1} + x_2 = 1 \\ \overline{x_2} + x_3 = 1 \\ \dots \\ x_5 + \overline{x_4} = 1 \end{cases}$, которая имеет ровно 6 решений (см. пример): $(1;1;1;1;1)$, $(0;1;1;1;1)$, $(0;0;1;1;1)$, $(0;0;0;1;1)$, $(0;0;0;0;1)$ и $(0;0;0;0;0)$.

Второе уравнение также имеет 6 различных решений. В силу независимости уравнений исходной системы общее количество решений равно $36 = 6 \cdot 6$.

3. Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} \cdot x_4 = 1 \\ x_3 + \overline{x_4} + \overline{x_5} \cdot x_6 = 1 \\ x_5 + \overline{x_6} + \overline{x_7} \cdot x_8 = 1 \\ x_7 + \overline{x_8} + \overline{x_9} \cdot x_{10} = 1 \end{cases}$$

, где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ – логические переменные.

Ответ: 364

Указание. Обозначим $y_i = x_{2i-1} + \overline{x_{2i}}$, $i = \overline{1,5}$. Тогда $\overline{y_i} = \overline{x_{2i-1}} \cdot x_{2i}$ (законы двойственности де Моргана) и система запишется $\begin{cases} y_1 + \overline{y_2} = 1 \\ y_2 + \overline{y_3} = 1 \\ y_3 + \overline{y_4} = 1 \\ y_4 + \overline{y_5} = 1 \end{cases}$.

Легко видеть, что при $y_1 = 0$ набор (0;0;0;0;0) является решением системы. Пусть $y_1 = 1$, тогда если $y_2 = 0$, то и все остальные y_i также равны нулю. Если же $y_2 = 1$, то для y_3 есть две возможности 0 и 1. Таким образом, система имеет такие решения: $(0;0;0;0;0)$, $(1;0;0;0;0)$, $(1;1;0;0;0)$, $(1;1;1;0;0)$, $(1;1;1;1;0)$ и $(1;1;1;1;1)$.

Заметим, что переменные y_i независимы друг от друга. Поскольку переменные y_i равны 0 в одном случае, и равны 1 в трех случаях (в зависимости от значений переменных x_{2i-1}, x_{2i},) получаем, что

решению $(0;0;0;0;0)$ соответствует одно решение исходной системы,

решению $(1;0;0;0;0)$,соответствует 3 решения исходной системы,

решению $(1;1;0;0;0)$,соответствует 9 решений исходной системы, и т.д., последнему решению $(1;1;1;1;1)$ соответствует $3^5 = 243$ различных решения. Таким образом всего исходная система имеет $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^5 = 364$ решения.

4. Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_3} \cdot x_4 = 1 \\ x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_5 \cdot \overline{x_6} + \overline{x_5} \cdot x_6 = 1 \\ x_5 \cdot x_6 + \overline{x_5} \cdot \overline{x_6} + x_7 \cdot \overline{x_8} + \overline{x_7} \cdot x_8 = 1 \\ x_7 \cdot x_8 + \overline{x_7} \cdot \overline{x_8} + x_9 \cdot \overline{x_{10}} + \overline{x_9} \cdot x_{10} = 1 \end{cases}$$

, где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ – логические переменные.

Ответ: 192

Указание. Заметим, что $a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} = a \equiv b$ и $a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = a \oplus b$. Тогда систему можно записать $\begin{cases} (x_1 \equiv x_2) + (x_3 \oplus x_4) = 1 \\ (x_3 \equiv x_4) + (x_5 \oplus x_6) = 1 \\ (x_5 \equiv x_6) + (x_7 \oplus x_8) = 1 \\ (x_7 \equiv x_8) + (x_9 \oplus x_{10}) = 1 \end{cases}$. Обозначим $y_i = x_{2i-1} \equiv x_{2i}$и заметим, что $\overline{y_i} = x_{2i-1} \oplus x_{2i}$, тогда система переписывается в виде $\begin{cases} y_1 + \overline{y_2} = 1 \\ y_2 + \overline{y_3} = 1 \\ y_3 + \overline{y_4} = 1 \\ y_4 + \overline{y_5} = 1 \end{cases}$. Таким образом, задача свелась к системе, рассмотренной в примере. У этой системы 6 решений. Поскольку все y_i <u>независимы</u>, и каждое значение y принимается в двух случаях и, получаем, что всего решений $6 \cdot 2^5$=192.

5. Сколько различных решений имеет система уравнений $\begin{cases} \overline{x_1 \equiv x_2} + x_3 \equiv x_4 = 1 \\ \overline{x_3 \equiv x_4} + x_5 \equiv x_6 = 1 \\ \overline{x_5 \equiv x_6} + x_7 \equiv x_8 = 1 \\ \overline{x_7 \equiv x_8} + x_9 \equiv x_{10} = 1 \end{cases}$,

где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ – логические переменные.

Ответ: 192

Указание. Заметим, что $\overline{a \equiv b} = a \oplus b$, поэтому систему уравнений можно переписать $\begin{cases} x_1 \oplus x_2 + x_3 \equiv x_4 = 1 \\ x_3 \oplus x_4 + x_5 \equiv x_6 = 1 \\ x_5 \oplus x_6 + x_7 \equiv x_8 = 1 \\ x_7 \oplus x_8 + x_9 \equiv x_{10} = 1 \end{cases}$. Обозначим $y_i = x_{2i-1} \oplus x_{2i}$, тогда $\overline{y_i} = x_{2i-1} \equiv x_{2i}$ и систему можно записать в виде $\begin{cases} y_1 + \overline{y_2} = 1 \\ y_2 + \overline{y_3} = 1 \\ y_3 + \overline{y_4} = 1 \\ y_4 + \overline{y_5} = 1 \end{cases}$. Т.е. опять пришли к системе, рассмотренной в примере. У этой системы 6 решений. Поскольку каждое значение y принимается в двух случаях и все y_i независимы, получаем, что всего решений $6 \cdot 2^5$=192.

Наличие дополнительного условия

Рассмотренные ранее системы были открытыми, там не было дополнительных условий связи. Наличие таких условий налагает на систему некоторые ограничения, что приводит к уменьшению количества решений. Такими условиями могут быть, например, уравнения связи последних переменных с первыми.

Пример. Сколько решений имеет система логических переменных $\begin{cases} \overline{x_1} + x_2 = 1 \\ \overline{x_2} + x_3 = 1 \\ \dots \\ \overline{x_m} + x_1 = 1 \end{cases}$

где $x_1, x_2, \dots, x_m$ – логические переменные.

Ответ: 2

Решение. Здесь таким дополнительным условием является последнее уравнение.
Пусть x_1 – истинно ($x_1 = 1$), тогда из первого уравнения (из первой импликации) получаем, что x_2 также истинно ($\overline{x_1} = 0$, поэтому для выполнения уравнения необходимо, чтобы $x_2 = 1$). Далее, из второго уравнения получаем, что x_3 истинно ($x_3 = 1$), и т.д. до $x_m = 1$. Из последнего, замыкающего, уравнения получаем, что x_1 должно быть истинно, что соответствует нашему предположению. Значит, набор $(1; 1; \dots; 1)$ из m единиц является решением системы.
Пусть теперь x_1 – ложно ($x_1 = 0$), тогда из последнего уравнения следует, что x_m должно быть ложным. Далее, из предпоследнего уравнения $\overline{x_{m-1}} + x_m = 1$ получаем, что x_{m-1} должно быть ложным. И так далее, доходим до первого уравнения с результатом, что x_1 должно быть ложным, что соответствует нашему предположению. Значит, набор $(0; 0; \dots; 0)$ из m нулей также является решением системы. Значит, всего система имеет 2 решения.
Сравните с количеством решений $(m + 1)$ незамкнутой системы, рассмотренной в примере предыдущего раздела.

Вот несколько задач с замкнутыми системами.

1. Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, которые удовлетворяют условию:
$(x_5 \to x_4) \cdot (x_4 \to x_3) \cdot (x_3 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_1) \cdot (x_1 \to x_5) = 1$.
В ответе не надо перечислять все различные наборы значений переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа надо указать количество таких наборов.

   Ответ: 2

   Указание. Задача почти дословно повторяет разобранный пример. Если $x_5 = 1$, то и все остальные x_i равны 1. Если $x_5 = 0$, то x_4 может принимать любые значения. Если $x_4 = 1$, то и все остальные x_i, включая x_5 также равны 1, что противоречит условию $x_5 = 0$. Значит, если $x_5 = 0$, то и $x_4 = 0$ и т.д. Таким образом, система имеет решения $(1; 1; 1; 1; 1)$ и $(0; 0; 0; 0; 0)$.

2. . Сколько решений имеет система логических переменных
$\begin{cases} (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) \cdot \dots \cdot (x_4 \to x_5) = 1 \\ (y_1 \to y_2) \cdot (y_2 \to y_3) \cdot \dots \cdot (y_4 \to y_5) = 1 \\ x_1 + y_1 = 1 \end{cases}$, где x_i, y_i, $i = \overline{1{,}5}$ – логические переменные.

   Ответ: 11

   Указание. Здесь дополнительным условием является уравнение, связывающее переменные x_1 и y_1. Рассмотрим первое уравнение системы. Очевидно, что оно имеет 6 решений:

$(0;0;0;0;0)$, $(0;1;1;1;1)$, $(0;0;1;1;1)$, $(0;0;0;1;1)$, $(0;0;0;0;1)$ и $(1;1;1;1;1)$. В первых 5 случаях из последнего уравнения следует, что $y_1 = 1$, и тогда, из второго уравнения, все $y_i = 1$, для $i = \overline{1{,}5}$. Т.е. имеем 5 различных решений. Если же $x_1 = 1$, то из последнего уравнения $y_1 = 1$, или $y_1 = 0$. В первом случае все $y_i = 1$, для $i = \overline{1{,}5}$ – еще одно решение. В случае, когда решение первого уравнения суть $(1;1;1;1;1)$, получаем такие же 6 наборов для y_i, как были выписаны для x_i. Таким образом, получили еще 6 решений. И всего – 11.

3. Сколько решений имеет система $\begin{cases} a+\bar{b}+\bar{c}\cdot d = 1 \\ c+\bar{d}+\bar{e}\cdot f = 1 \\ e+\bar{f}+\bar{g}\cdot h = 1 \\ g+\bar{h}+\bar{\imath}\cdot j = 1 \\ i+\bar{\jmath}+\bar{a}\cdot b = 1 \end{cases}$, где a,b,c,d,e,f,g,h,i,j – логические переменные?

Ответ: 244

Указание. Обозначим в системе $x_1 = a+\bar{b}$, $x_2 = c+\bar{d}$, $x_3 = e+\bar{f}$, $x_4 = g+\bar{h}$, $x_5 = i+\bar{\jmath}$ и заметим, что $\overline{x+\bar{y}} = \bar{x}\cdot y$ (законы двойственности де Моргана). Тогда система уравнений может быть записана $\begin{cases} x_1+\overline{x_2} = 1 \\ x_2+\overline{x_3} = 1 \\ x_3+\overline{x_4} = 1 \\ x_4+\overline{x_5} = 1 \\ x_5+\overline{x_1} = 1 \end{cases}$. Эта система аналогична системе, рассмотренной в №4, но она замкнута. Если $x_1 = 0$, то из первого уравнения $x_2 = 0$ и т.д., т.е. имеется решение $(0;0;0;0;0)$. Если же $x_1 = 1$, то из первого уравнения x_2 может быть любым. Если $x_2 = 0$, то из второго уравнения $x_3 = 0$ и т.д. и из последнего уравнения получаем $x_1 = 0$. Противоречие. Значит, $x_2 = 1$. Рассуждая аналогично, получаем, что система имеет решение $(1;1;1;1;1)$, т.е. всего 2 решения. Для получения этого результата можно было воспользоваться разобранным примером. Так как переменные x_i в системе независимы и каждая их них принимает значение 0 в одном случае, а значение 1 в 3 случаях, то получаем, что первое уравнение полученной системы дает одно решение исходной системы, второе –243 решения. Суммируя полученные результаты, получаем $1+243 = 244$.

4. Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} (x_1 \equiv x_2)+(x_2\cdot x_{10})+(\overline{x_2}\cdot\overline{x_{10}}) = 1 \\ (x_2 \equiv x_3)+(x_3\cdot x_{10})+(\overline{x_3}\cdot\overline{x_{10}}) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \equiv x_9)+(x_9\cdot x_{10})+(\overline{x_9}\cdot\overline{x_{10}}) = 1 \\ x_{10} \equiv x_1 = 0 \end{cases}$$

, где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ – логические переменные.

Ответ: 18

Указание. Дополнительное условие в этой задаче – уравнение $x_1 \equiv x_{10} = 0$.

Заметим, что $a\cdot b+\bar{a}\cdot\bar{b} = a \equiv b$. Тогда систему можно записать $\begin{cases} (x_1 \equiv x_2)+(x_2 \equiv x_{10}) = 1 \\ (x_2 \equiv x_3)+(x_3 \equiv x_{10}) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \equiv x_9)+(x_9 \equiv x_{10}) = 1 \\ x_1 \equiv x_{10} = 0 \end{cases}$.

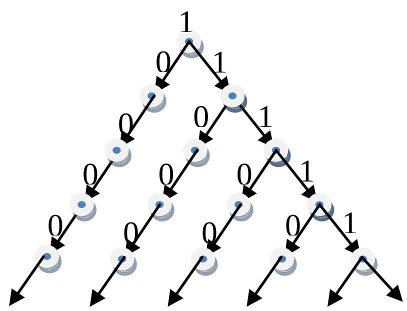
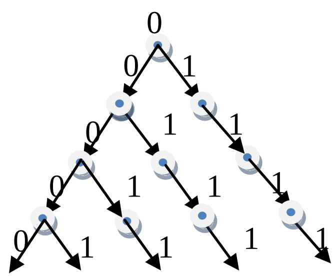
Из последнего уравнения имеем, что существуют два набора переменных $\{x_1; x_{10}\}$, при которых последнее уравнение справедливо. Тогда из первого уравнения получаем x_2 – любое (x_2 совпадает либо с x_1 либо с x_{10}). Далее возможны такие рассуждения.

Если $x_2 \equiv x_{10}$, то из второго уравнения $x_3 \equiv x_2 \equiv x_{10}$ и, следовательно, $x_9 \equiv x_8 \equiv \cdots \equiv x_2 \equiv x_{10}$. Таким образом, в этом случае получаем 2 решения (для двух возможных значений переменной x_{10}).

Если же $x_2 \equiv x_1$, то из второго уравнения получаем x_3 – любое. Если $x_3 \equiv x_{10}$, то из третьего уравнения $x_4 \equiv x_3 \equiv x_{10}$ и, следовательно, $x_9 \equiv x_8 \equiv \cdots \equiv x_3 \equiv x_{10}$. Таким образом, в этом случае снова получаем 2 решения. Если же $x_3 \equiv x_1$, то из третьего уравнения получаем x_4 – любое. Повторяя указанные рассуждения для всех оставшихся уравнений системы, получаем, что система имеет такие решения:

$(x_1; x_2 = x_3 = \cdots = x_{10})$, $(x_1 = x_2; x_3 = x_4 = \cdots = x_{10})$, $(x_1 = \cdots = x_3; x_4 = x_5 = \cdots = x_{10})$,…, $(x_1 = x_2 = \cdots = x_9; x_{10})$ для каждой пары значений $\{x_1; x_{10}\}$. Значит, система имеет 18 различных решений.

Этот же результат можно получить при помощи построения дерева. Пусть $x_1 = 1$, тогда $x_{10} = 0$. Если на каком-то этапе одна из переменных $x_i \equiv x_{10}$, то и все оставшиеся переменные также эквивалентны x_{10}. В приводимой ниже таблице показано, как строится дерево. Легко видеть , что при наличии *n* $(n \geq 2)$ переменных получаем *n* решений, т.е. для 9 переменных – 9 решений. Аналогично строится дерево , начиная с $x_1 = 0$, $x_{10} = 1$. Таким образом, снова получаем 18 решений.

Переменные	Дерево, начинающееся с 1	Дерево, начинающееся с 0	Количество решений
x_1			
x_2			2
x_3			3
x_4			4
x_5			5
…			…

Рассмотрим еще пару уравнений, сводящихся к замкнутым системам.

5. Сколько различных решений имеет уравнение $(M \to L) \cdot (L \to K) \cdot (L \to \bar{M}) \cdot (K \to M) \cdot (O \to N) = 1$, где K, L, M, N, O – логические переменные?

Ответ: 3

Указание. Запишем уравнение, используя коммутативность конъюнкции:

$$(K \to M) \cdot (M \to L) \cdot (L \to K) \cdot (L \to \bar{M}) \cdot (O \to N) = 1$$

Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все ее операнды. Конъюнкция первых четырех импликаций дает замкнутую систему $\begin{cases} \bar{K} + M = 1 \\ \bar{M} + L = 1 \\ \bar{L} + K = 1 \\ \bar{L} + \bar{M} = 1 \end{cases}$. Из первых трех уравнений системы получаем два возможных решения: $(K; L; M) = (0; 0; 0)$, и $(1; 1; 1)$. Последнее четвертое уравнение такой сокращенной системы оставляет только одно решение: $(0; 0; 0)$.

Так как последняя импликация исходной системы также должна быть истинна, то получаем 3 возможных решения исходной системы: $(K; L; M; N; O) = (0; 0; 0; 0; 0)$, $(0; 0; 0; 1; 0)$ и $(0; 0; 0; 1; 1)$.

6. Сколько различных решений имеет уравнение $(O \to L) \cdot (K \to L) \cdot (M \to \overline{N}) \cdot (L \to M) \cdot (M \to K) = 1$, где K, L, M, N, O– логические переменные?

Ответ: 4

Указание. Запишем уравнение, используя коммутативность конъюнкции:

$$(K \to L) \cdot (L \to M) \cdot (M \to K) \cdot (M \to \overline{N}) \cdot (O \to L) = 1$$

Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все ее операнды. Конъюнкция первых трех импликаций дает замкнутую систему $\begin{cases} \overline{K} + L = 1 \\ \overline{L} + M = 1 \\ \overline{M} + K = 1 \end{cases}$, откуда получаем два возможных решения: $(K; L; M) = (0; 0; 0)$, и $(1; 1; 1)$.

В двух последних импликациях один из параметров уже определен предыдущими импликациями. Импликация $(M \to \overline{N})$ будет истинна при таких сочетаниях параметров $(M; N) = (0; 0)$, $(0; 1)$ и $(1; 0)$. Импликация $(O \to L)$ будет истинна при таких сочетаниях параметров $(L; O) = (0; 0)$, $(1; 0)$ и $(1; 1)$. Объединяя результаты, получаем, что данное уравнение имеет четыре различных решения:

$(K; L; M; N; O) = (0; 0; 0; 0; 0)$, $(0; 0; 0; 1; 0)$, $(1; 1; 1; 0; 0)$ и $(1; 1; 1; 0; 1)$.

Задачи, сводящиеся к числам Фибоначчи[2]

Разберем такую задачу.

Пример. Сколько различных решений имеем система логических уравнений

вида $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ \dots \\ x_{m-1} + x_m = 1 \end{cases}$, где $x_1, x_2, \dots, x_m$ – логические переменные.

Замечание. Система специально записана для произвольного числа уравнений, чтобы можно было рассматривать любое количество уравнений.

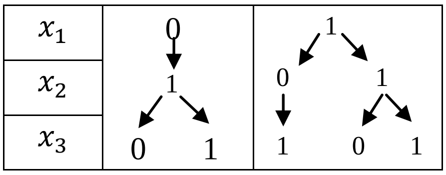
Ответ: F_{m+2} – (m+2) число последовательности Фибоначчи.

Решение. Рассмотрим сначала случай 2-х уравнений, т.е. систему вида $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$.

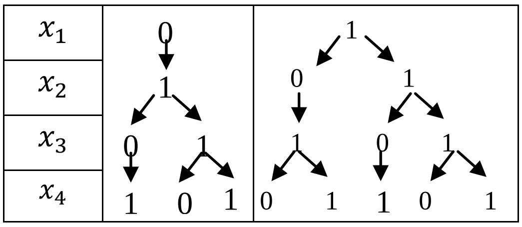
Пусть $x_1 = 0$, тогда из первого уравнения имеем: $x_2 = 1$, а из второго уравнения получаем, что переменная x_3 может принимать произвольные значения. Значит, в этом случае система имеет решения $(0; 1; 0)$, $(0; 1; 1)$.

Пусть $x_1 = 1$, тогда из первого уравнения получаем, что x_2 может принимать произвольные значения. Если $x_2 = 0$, то из второго уравнения имеем $x_3 = 1$, в противном случае переменная x_3 может принимать произвольные значения. Значит, в этом случае система имеет еще три решения: $(1; 0; 1)$, $(1; 1; 0)$ и $(1; 1; 1)$. Всего 5 решений.

Тот же результат можно проиллюстрировать построением дерева:



Добавим еще одно уравнение, т.е. рассмотрим систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$. Поступая аналогично рассмотренному случаю получаем, что решениями указанной системы уравнений будут следующие наборы: $(0; 1; 0; 1)$, $(0; 1; 1; 0)$, $(0; 1; 1; 1)$, $(1; 0; 1; 0)$, $(1; 0; 1; 1)$, $(1; 1; 0; 1)$, $(1; 1; 1; 0)$ и $(1; 1; 1; 1)$. Всего 8 решений. Эти решения также легко проиллюстрировать с помощью дерева:



Из рассмотренных случаев можно сделать <u>выводы</u>:

1) Если первая переменная некоторого уравнения принимает значение 0 (false), то вторая переменная этого уравнения в обязательном порядке принимает значение 1(true);

2) Если первая переменная уравнения принимает значение 1(true), то вторая переменная может принимать произвольное значение, как 0 , так и 1.

Обозначим N_k – общее количество решений системы *k* уравнений, N_k^0, N_k^1 – количество решений этой системы, последняя переменная которых соответственно равна 0 или 1. Легко

[2] Идея нахождения количества решений как чисел Фибоначчи подсказана в работе: Демидова М.В. Решение задачи типа B10 КИМов ЕГЭ по информатике 2011 года посредством построения дерева. Опубликована на портале it-n.ru в сообществе информатиков: http://www.it-n.ru/attachment.aspx?id=123369

видеть, что $N_1^0 = 1$ и $N_1^1 = 2$. На основании сделанных из рассмотренных случаев выводов получаем соотношения:

$$N_{k+1}^0 = N_k^1 \quad \text{и} \quad N_{k+1}^1 = N_k^1 + N_k^0 = N_k.$$

Теперь общее количество решений k уравнений запишется:

$$N_{k+1} = N_{k+1}^0 + N_{k+1}^1 = N_k^1 + N_k = N_{k-1} + N_k \ \text{ или } \ N_{k+1} = N_k + N_{k-1}.$$

Таким образом, получили рекуррентное соотношение с начальными условиями $N_1 = 3$, $N_2 = 5$. Указанному рекуррентному соотношению, как известно, удовлетворяют числа Фибоначчи[3], только в данном системе начальные значения иные (совпадают с 4 и 5-ми членами последовательности Фибоначчи). Сравнивая начальные значения с последовательностью Фибоначчи, получаем ответ – количество решений равно (m+2)-му члену последовательности Фибоначчи: F_{m+2}.

Многие задачи, встречающиеся в различных источниках (варианты ЕГЭ, пробные экзамены и т.п.) сводятся к рассмотренной задаче.

1. Сколько различных решений имеет система логических уравнений $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{(x_2 \oplus x_3)} = 1 \\ x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{(x_3 \oplus x_4)} = 1 \end{cases}$, где x_1, x_2, x_3, x_4 – логические переменные.

Ответ: 10

Указание. Заметим, что $a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} = a \equiv b$, а также, что $\overline{a \oplus b} = a \equiv b$. Тогда систему можно записать $\begin{cases} (x_1 \equiv x_2) + (x_2 \equiv x_3) = 1 \\ (x_2 \equiv x_3) + (x_3 \equiv x_4) = 1 \end{cases}$.

Введем обозначения $y_i = (x_i \equiv x_{i+1})$, $i = 1,2,3$. Тогда систему уравнений можно записать $\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$, т.е имеем систему , разобранную в примере. Эта система имеет 5 (пятое число в последовательности Фибоначчи) решений: $(0;1;0)$, $(0;1;1)$, $(1;0;1)$, $(1;1;0)$ и $(1;1;1)$.

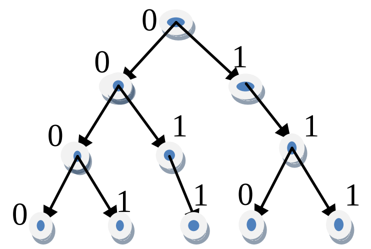
К сожалению, <u>введенные переменные не являются независимыми</u>.

Заметим, что пара $(x_1; y_1)$ позволяет однозначно восстановить значение переменной x_2. Пара $(x_2; y_2)$ позволяет однозначно восстановить значение переменной x_3, и т.д. То есть, задавая значение начальной переменной, решение восстанавливается однозначно.

Например, для $x_1 = 0$ и решения $(y_1; y_2; y_3) = (0;1;0)$ получаем решение исходной системы $(0;1;1;0)$. Если же $x_1 = 1$ и $(y_1; y_2; y_3) = (0;1;0)$, то получается решение $(1;0;0;1)$.

Поэтому для различных значений переменной x_1 получаем два решения, соответствующие каждому решению из набора $(y_1; y_2; y_3)$. Значит, всего исходная система имеет $2 \cdot 5 = 10$ различных решений.

Замечание. Конечно, решение данной задачи можно было построить также, как в разобранном примере, т.е. для каждого значения переменной x_1 построить свое дерево решений. Пример такого дерева для $x_1 = 0$ приведен на рисунке. Значения переменных соответствуют одному уровню дерева.



---

[3] Числа Фибоначчи определяются рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$. Вот первые из чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,…

2. Сколько различных решений имеет система логических уравнений
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{(\overline{x_3} \cdot x_4 + x_3 \cdot \overline{x_4})} = 1 \\ x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{(\overline{x_5} \cdot x_6 + x_5 \cdot \overline{x_6})} = 1 \\ x_5 \cdot x_6 + \overline{x_5} \cdot \overline{x_6} + \overline{(\overline{x_7} \cdot x_8 + x_7 \cdot \overline{x_8})} = 1 \end{cases}$$
, где $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$ – логические переменные.

Ответ: 128.

Указание. Заметим, что $a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} = a \equiv b$, и $a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = a \oplus b$, а также, что $\overline{a \oplus b} = a \equiv b$.

Тогда систему уравнений можно записать в виде $\begin{cases} (x_1 \equiv x_2) + (x_3 \equiv x_4) = 1 \\ (x_3 \equiv x_4) + (x_5 \equiv x_6) = 1. \\ (x_5 \equiv x_6) + (x_7 \equiv x_8) = 1 \end{cases}$

Введем обозначения $y_i = (x_{2i-1} \equiv x_{2i})$, $i = 1,2,3,4$. Тогда систему уравнений можно записать $\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_2 + y_3 = 1 \\ y_3 + y_4 = 1 \end{cases}$, т.е. опять имеем систему вида, рассмотренного в примере. Здесь $m = 4$, поэтому система имеет $F_6 = 8$ различных решений (F_6 – 6- е число последовательности Фибоначчи).

В отличие от предыдущей задачи, здесь переменные y_i <u>независимы</u>, при этом y_i каждое свое значение принимает при двух различных наборах значений x_{2i-1} и x_{2i}. Поэтому каждому решению $(y_1, y_2, \dots, y_4)$ соответствует $2^4 = 16$ решений исходной системы. Значит всего решений $F_6 \cdot 2^4 = 128$.

3. Сколько различных решений имеет система логических уравнений
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} = 1 \\ x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} = 1 \\ \dots \\ x_8 \cdot x_9 + \overline{x_8} \cdot \overline{x_9} + x_9 \cdot x_{10} + \overline{x_9} \cdot \overline{x_{10}} = 1 \end{cases}$$
, где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ – логические переменные.

Ответ: 178

Указание. Заметим, что $a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} = a \equiv b$. Тогда систему можно записать
$\begin{cases} (x_1 \equiv x_2) + (x_2 \equiv x_3) = 1 \\ (x_2 \equiv x_3) + (x_3 \equiv x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_7 \equiv x_8) + (x_8 \equiv x_9) = 1 \\ (x_8 \equiv x_9) + (x_9 \equiv x_{10}) = 1 \end{cases}$. Введем обозначения $y_i = (x_i \equiv x_{i+1})$, $i = \overline{1,9}$. Тогда систему уравнений можно записать $\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_2 + y_3 = 1 \\ \dots \\ y_8 + y_9 = 1 \end{cases}$, т.е. опять имеем систему вида, рассмотренного в примере. Здесь $m = 9$, поэтому система имеет $F_{11} = 89$ различных решений (F_{11} – 11- е число последовательности Фибоначчи).

В этой задаче переменные y_i <u>зависимы</u>. Поступая аналогично задаче Fib1, получаем, что задавая начальное значение переменной x_1 для каждого найденного решения преобразованной системы имеем 2 различных решения исходной системы. Таким образом, исходная система имеет $2F_{11} = 2 \cdot 89 = 178$ различных решений.

4. Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{(\overline{x_3} \cdot x_4 + x_3 \cdot \overline{x_4})} = 1 \\ x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{(\overline{x_5} \cdot x_6 + x_5 \cdot \overline{x_6})} = 1 \\ x_5 \cdot x_6 + \overline{x_5} \cdot \overline{x_6} + \overline{(\overline{x_7} \cdot x_8 + x_7 \cdot \overline{x_8})} = 1 \\ x_7 \cdot x_8 + \overline{x_7} \cdot \overline{x_8} + \overline{(\overline{x_9} \cdot x_{10} + x_9 \cdot \overline{x_{10}})} = 1 \end{cases}$$

, где $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ – логические переменные.

Ответ: 416.

Указание. См. решение задачи 2 Количество решений равно $2^5 \cdot F_7 = 32 \cdot 13 = 416$.

5. Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{(x_2 \oplus x_3)} = 1 \\ x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{(x_3 \oplus x_4)} = 1 \\ \dots \\ x_8 \cdot x_9 + \overline{x_8} \cdot \overline{x_9} + \overline{(x_9 \oplus x_{10})} = 1 \end{cases}$$

, где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ – логические переменные.

Ответ: 178

Указание. См.решение задачи 3. Количество решений равно $2F_{11} = 2 \cdot 89 = 178$

Задачи вне классификации.

В этом разделе собраны задачи с системами логических уравнений, которые не попадают в выделенные разделы.

1. [**DR1_19.12.11, вар.1**] Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, …, x_9, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$\begin{cases}(\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3)+(\overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3})+(x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3})=1\\(\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4)+(\overline{x_2}\cdot x_3\cdot\overline{x_4})+(x_2\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4})=1\\ \dots\\(\overline{x_7}\cdot\overline{x_8}\cdot x_9)+(\overline{x_7}\cdot x_8\cdot\overline{x_9})+(x_7\cdot\overline{x_8}\cdot\overline{x_9})=1\end{cases}$$

Ответ: 3

Указание. Построим таблицу истинности для одного такого соотношения. Буквой f обозначена дизъюнкция в левой части первого уравнения

x_1	x_2	x_3	$x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}$	$\overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3}$	$\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

Получим, что выражение истинно тогда и только тогда, когда истинна только одна из трех переменных x_1, x_2, или x_3, т.е. имеет место один из трех наборов: $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$. Аналогичный результат получаем для остальных 7 соотношений. Поэтому все выражение будет истинно при следующих наборах неизвестных $(1;0;0;1;0;0;1;0;0)$, $(0;1;0;0;1;0;0;1;0)$ и $(0;0;1;0;0;1;0;0;1)$, т.е. всего при трех наборах переменных.

2. [**DR1_19.12.11, вар.2**] Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, …, x_9, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$\begin{cases}(\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3)+(x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_3)+(x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3})=1\\(\overline{x_2}\cdot x_3\cdot x_4)+(x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4)+(x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4})=1\\ \dots\\(\overline{x_7}\cdot x_8\cdot x_9)+(x_7\cdot\overline{x_8}\cdot x_9)+(x_7\cdot x_8\cdot\overline{x_9})=1\end{cases}$$

Ответ: 3

Указание. Задача аналогична задаче первого варианта (№1). Система уравнений будет выполняться при следующих наборах неизвестных $(1;1;0;1;1;0;1;1;0)$, $(0;1;1;0;1;1;0;1;1)$ и $(1;0;1;1;0;1;1;0;1)$, т.е. всего при трех наборах переменных.

3. Сколько различных решений имеет система логических уравнения
$$\begin{cases}((x_1 \equiv x_2) + (x_3 \equiv x_4)) \cdot (\overline{x_1 \equiv x_2} + \overline{x_3 \equiv x_4}) = 1 \\ ((x_3 \equiv x_4) + (x_5 \equiv x_6)) \cdot (\overline{x_3 \equiv x_4} + \overline{x_5 \equiv x_6}) = 1 \\ \dots \\ ((x_7 \equiv x_8) + (x_9 \equiv x_{10})) \cdot (\overline{x_7 \equiv x_8} + \overline{x_9 \equiv x_{10}}) = 1\end{cases}$$
, где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ – логические переменные.

Ответ: 64

Указание. Обозначим $y_i = (x_{2i-1} \equiv x_{2i})$, $i = \overline{1{,}5}$, при этом y_i принимает каждое свое значение при двух вариантах переменных x_i. Тогда систему можно переписать
$$\begin{cases}(y_1 + y_2) \cdot (\overline{y_1} + \overline{y_2}) = 1 \\ (y_2 + y_3) \cdot (\overline{y_2} + \overline{y_3}) = 1 \\ \dots \\ (y_4 + y_5) \cdot (\overline{y_4} + \overline{y_5}) = 1\end{cases}$$
или, после очевидного преобразования
$$\begin{cases}y_1 \oplus y_2 = 1 \\ y_2 \oplus y_3 = 1 \\ y_3 \oplus y_4 = 1 \\ y_4 \oplus y_5 = 1\end{cases}$$
. Легко видеть, что система выполняется при следующих наборах переменных y_i: $(0; 1; 0; 1; 0)$ и $(1; 0; 1; 0; 1)$. Эти наборы можно получить путем логических рассуждений или построения дерева. Так как переменные y_i независимы, и каждое значение переменной y_i принимает каждое свое значение при двух вариантах переменных x_i, то каждый такой набор достигается при 2^5 различных наборах переменных x_i. Значит, всего уравнение имеет $2 \cdot 2^5 = 2^6 = 64$ различных решения.

4. [**Tr1_10_2011**] Сколько различных решений имеет система уравнений
$$\begin{cases}\overline{x_1 \equiv x_2} \cdot \overline{x_2 \equiv x_3} = 1 \\ \overline{x_2 \equiv x_3} \cdot \overline{x_3 \equiv x_4} = 1 \\ \dots \\ \overline{x_8 \equiv x_9} \cdot \overline{x_9 \equiv x_{10}} = 1\end{cases}$$
, где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные?

Ответ: 2 решения

Указание. Перепишем систему с учетом правил де Моргана. Получим
$$\begin{cases}(x_1 \oplus x_2) \cdot (x_2 \oplus x_3) = 1 \\ (x_2 \oplus x_3) \cdot (x_3 \oplus x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \oplus x_9) \cdot (x_9 \oplus x_{10}) = 1\end{cases}$$
или
$$\begin{cases}x_1 \oplus x_2 = 1 \\ x_2 \oplus x_3 = 1 \\ \dots \\ x_9 \oplus x_{10} = 1\end{cases}$$
. Теперь очевидно, что в каждом уравнении истинна только одна из переменных. Таким образом, получаем, что решениями системы являются наборы (1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0) и (0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1).

5. Сколько различных решений имеет система логических уравнений
$$\begin{cases}x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + (x_1 \equiv x_3) = 1 \\ x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + (x_2 \equiv x_4) = 1 \\ \dots \\ x_8 \cdot x_9 + \overline{x_8} \cdot \overline{x_9} + (x_8 \equiv x_{10}) = 1\end{cases}$$

Ответ: 20

Указание. Заметим, что $a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} = a \equiv b$. Тогда систему можно записать
$$\begin{cases}(x_1 \equiv x_2) + (x_1 \equiv x_3) = 1 \\ (x_2 \equiv x_3) + (x_2 \equiv x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_7 \equiv x_8) + (x_7 \equiv x_9) = 1 \\ (x_8 \equiv x_9) + (x_8 \equiv x_{10}) = 1\end{cases}$$
или, переходя к отрицаниям по законам де Моргана,

$$\begin{cases}(x_1 \oplus x_2)\cdot(x_1 \oplus x_3)=0\\(x_2 \oplus x_3)\cdot(x_2 \oplus x_4)=0\\\qquad\qquad\dots\\(x_7 \oplus x_8)\cdot(x_7 \oplus x_9)=0\\(x_8 \oplus x_9)\cdot(x_8 \oplus x_{10})=0\end{cases}.$$

Уравнения системы имеют вид $(a \oplus b)\cdot(a \oplus c)=0$. Составим таблицу истинности для такого уравнения (при входах ***a*** и ***b***). В последнем столбце таблицы приведены возможные значения переменной ***c*** для выполнения равенства.

a	***b***	***c***
0	0	0 | 1
0	1	0
1	0	1
1	1	0 | 1

Из таблицы видно, что для удовлетворения равенства в случае равенства двух входов *a* и *b*, третий параметр может быть произвольным, в случае, когда входы *a* и *b* противоположны, то параметр *c* должен принимать такое же значение, как и параметр *a*. Поэтому если в решении системы значения переменных начинают чередоваться, то так продолжается до окончания переменных. Значит, начиная с $x_1=0$ (или с $x_1=1$) мы получаем такие решения:

$x_1=0$	$x_1=1$
$(0;0;0;0;0;0;0;0;0;0)$, $(0;1;0;1;0;1;0;1;0;1)$, $(0;0;1;0;1;0;1;0;1;0)$, $(0;0;0;1;0;1;0;1;0;1)$, $(0;0;0;0;1;0;1;0;1;0)$, …, $(0;0;0;0;0;0;0;0;0;1)$	$(1;1;1;1;1;1;1;1;1;1)$, $(1;0;1;0;1;0;1;0;1;0)$, $(1;1;0;1;0;1;0;1;0;1)$, $(1;1;1;0;1;0;1;0;1;0)$, $(1;1;1;1;0;1;0;1;0;1)$, …, $(1;1;1;1;1;1;1;1;1;0)$
10 решений	10 решений

Таким образом, система имеет всего 20 решений.

Отдельные уравнения, сводящиеся к системе.

В этом разделе собраны задачи с большим количеством переменных (диагностические и тренировочные работы 2010/11 уч. года). Многие из них решаются проще при переходе к системе логических уравнений[4].

1. Сколько различных решений имеет уравнение $\left(\left(\mathrm{K}\overline{\mathrm{L}}\overline{\mathrm{N}} \to (\overline{\mathrm{L}} \to \mathrm{M})\right) + ((\overline{\mathrm{K}} + \mathrm{L} + \mathrm{N}) \to \overline{\mathrm{L}}\overline{\mathrm{M}})\right) \cdot (\mathrm{K} + \mathrm{N}) = 1$, где K, L, M, N – логические переменные?

   Ответ: 12

   Указание. Обозначим $\mathrm{A} = \mathrm{K}\overline{\mathrm{L}}\overline{\mathrm{N}}$, $\mathrm{B} = \mathrm{L} + \mathrm{M}$. Заметим, что $\overline{\mathrm{L}} \to \mathrm{M} = \mathrm{L} + \mathrm{M}$, $\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{K}} + \mathrm{L} + \mathrm{N}$, $\overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{L}}\overline{\mathrm{M}}$ (использованы законы двойственности де Моргана). Тогда уравнение можно записать в виде $((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) + (\overline{\mathrm{A}} \to \overline{\mathrm{B}})) \cdot (\mathrm{K} + \mathrm{N}) = 1$. Так как $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) + (\overline{\mathrm{A}} \to \overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{A}} + \mathrm{B} + \mathrm{A} + \overline{\mathrm{B}} = 1$ при любых значениях входящих переменных, то получаем уравнение $(\mathrm{K} + \mathrm{N}) = 1$, которое выполняется при трех наборах переменных $\{\mathrm{K}; \mathrm{N}\}$. Поскольку от переменных $\{\mathrm{L}; \mathrm{M}\}$ выражение не зависит, то оно выполняется при любых значениях этих переменных. Поэтому общее количество решений равно $3 \cdot 2^2 = 12$.

2. Сколько различных решений имеет уравнение $(((\overline{\mathrm{K}} \to \mathrm{M}) \to \mathrm{M}\overline{\mathrm{L}}\overline{\mathrm{N}}) + (\overline{\mathrm{K}}\overline{\mathrm{M}} \to (\overline{\mathrm{M}} + \mathrm{L} + \mathrm{N}))) \cdot \mathrm{LM} = 1$, где K, L, M, N – логические переменные?

   Ответ: 4

   Указание. Обозначим $A = K + M$, $B = \overline{\mathrm{M}} + \mathrm{L} + \mathrm{N}$. Заметим, что $\bar{A} = \bar{K}\bar{M}$, $\bar{B} = \mathrm{M}\overline{\mathrm{L}}\overline{\mathrm{N}}$ (использованы законы двойственности де Моргана), $\overline{\mathrm{K}} \to \mathrm{M} = \mathrm{K} + \mathrm{M} = \mathrm{A}$. Тогда уравнение можно записать в виде $\left((A \to \bar{B}) + (\bar{A} \to B)\right) \cdot LM = 1$. Так как $(\mathrm{A} \to \overline{\mathrm{B}}) + (\overline{\mathrm{A}} \to \mathrm{B}) = \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}} + \mathrm{A} + \mathrm{B} = 1$ при любых значениях входящих переменных, то получаем уравнение $LM = 1$, которое выполняется при единственном значении пары $\{L; M\}$. Так как уравнение выполняется при любых значениях переменных $\{K; N\}$? То общее количество решений равно $1 \cdot 2^2 = 4$.

3. Сколько различных решений имеет уравнение $\left((\bar{N} \to P) \to KLM\right) \cdot \left(\overline{\bar{N}\bar{P}} \to (\bar{K} + \bar{L} + \bar{M})\right) = 1$, где K, L, M, N, P– логические переменные?

   Ответ: 8

   Указание. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все ее операнды. Перепишем уравнение в виде системы: $\begin{cases} (\bar{N} \to P) \to KLM = 1 \\ \overline{\bar{N}\bar{P}} \to (\bar{K} + \bar{L} + \bar{M}) = 1 \end{cases}$.

   Обозначим $A = N + P$, $B = KLM$ и заметим, что $\bar{B} = \bar{K} + \bar{L} + \bar{M}$, $\bar{N} \to P = N + P = A$ и $\overline{\bar{N}\bar{P}} = N + P = A$. Поэтому систему можно записать $\begin{cases} A \to B = 1 \\ A \to \bar{B} = 1 \end{cases}$, откуда $A = 0$, B – произвольно. A является дизъюнкцией, т.е. ложна при одном сочетании параметров. Так как B произвольно, то для переменных $\{K, L, M\}$ возможны любые значения. Значит, общее количество решений будет равно $1 \cdot 2^3 = 8$.

---

[4] Выражаю благодарность Дубинкиной Татьяне Викторовне (Екатеринбург, форум Pedsovet.org) за идею решения уравнений системой.

4. Сколько различных решений имеет уравнение $\left(KLM \to (\bar{N} \to P)\right) \cdot \left((\bar{K} + \bar{L} + \bar{M}) \to (N + P)\right) = 1$, где K, L, M, N, P– логические переменные?

Ответ: 24

Указание. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все ее операнды. Перепишем уравнение в виде системы: $\begin{cases} KLM \to (\bar{N} \to P) = 1 \\ (\bar{K} + \bar{L} + \bar{M}) \to (N + P) = 1 \end{cases}$.

Обозначим $A = N + P$, $B = KLM$ и заметим, что $\bar{B} = \bar{K} + \bar{L} + \bar{M}$, $\bar{N} \to P = N + P = A$.

В этих обозначениях систему можно записать $\begin{cases} B \to A = 1 \\ \bar{B} \to A = 1 \end{cases}$. Отсюда $A = N + P = 1$, B может принимать произвольные значения. A является дизъюнкцией, т.е. истинна при трех сочетаниях параметров. Так как B произвольно, то для переменных $\{K, L, M\}$ возможны любые значения. Значит, общее количество решений будет равно $3 \cdot 2^3 = 24$.

5. Сколько различных решений имеет уравнение $\left((K \to L) \cdot (M \to \bar{N}) \to K\right) \cdot \overline{(L \to M)} = 1$, где K, L, M, N– логические переменные?

Ответ: 2

Указание. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все ее операнды. Перепишем уравнение в виде системы, $\begin{cases} (K \to L) \cdot (M \to \bar{N}) \to K = 1 \\ (L \to M) = 0 \end{cases}$. Импликация во втором уравнении ложна тогда и только тогда, когда посылка истинна, а утверждение ложно. Значит $L = 1$, $M = 0$. Преобразуем левую часть первого уравнения. Имеем (используются законы двойственности де Моргана и закон поглощения):

$(K \to L) \cdot (M \to \bar{N}) \to K = \overline{(\bar{K} + L) \cdot (\bar{M} + \bar{N})} + K = K \cdot \bar{L} + M \cdot N + K = K + M \cdot N$. Так как $M = 0$, То первое уравнение вырождается в $K = 1$. Так как первое уравнении выполняется независимо от того, какое значение принимает переменная N, то всего возможны два различных решения: $(K; L; M; N) = (1; 1; 0; 0)$ и $(1; 1; 0; 1)$.

6. Сколько различных решений имеет уравнение $(N \to MK) \cdot (\bar{M} \to L) \cdot (K \to L) \cdot (M \to K) = 1$, где K, L, M, N– логические переменные?

Ответ: 4

Указание. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все ее операнды. Перепишем уравнение в виде системы, заменяя импликацию на равносильное утверждение:

$\begin{cases} \bar{N} + MK = 1 \\ M + L = 1 \\ \bar{K} + L = 1 \\ \bar{M} + K = 1 \end{cases}$. Пусть $M = 0$, тогда из второго уравнения $L = 1$, а из первого уравнения $N = 0$.

Из третьего и четвертого уравнений следует, что для K возможны оба случая: 1 и 0. Пусть теперь $M = 1$, тогда из последнего уравнения $K = 1$, из третьего уравнения $L = 1$. Из первого уравнения имеем для N два возможных случая. Таким образом, равенство верно в четырех случаях: $(K; L; M; N) = (0; 1; 0; 0)$, $(1; 1; 0; 0)$, $(1; 1; 1; 0)$ и $(1; 1; 1; 1)$.

7. **[ФЦТ-2010, вар.51**] A, B, C – целые числа, для которых истинно высказывание $\overline{(A = B)} \cdot \left((A > B) \to (C = B)\right) \cdot ((B > A) \to (C = A))$. Чему равно B, если $A = 45$, $C = 18$**?**

Ответ: 18

Указание. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все ее операнды.

Перепишем уравнение в виде системы $\begin{cases} (A = B) = false \\ (A > B) \to (C = B) = true. \\ (B > A) \to (C = A) = true \end{cases}$

Так как по условию $A \neq C$, то посылка в третьем уравнении ложна, т.е. $B \leq A$. Из первого условия следует, что $A \neq B$, поэтому $A > B$. Во втором условии посылка истинна. Импликация при истинной посылке истинна тогда и только тогда, когда утверждение импликации истинно, поэтому утверждение $B = C$ истинно. Значит $B = C = 18$

8. A, B, C – целые числа, для которых истинно высказывание $\overline{(A = B)} \cdot \left((A > B) \to (2C > A)\right) \cdot ((B > A) \to (A > 2C))$. Чему равно A, если $B = 16$, $C = 7$***?***

Ответ: 15

Указание. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все ее операнды.

Перепишем уравнение в виде системы $\begin{cases} A = B = false \\ (A > B) \to (2C > A) = true. \\ (B > A) \to (A > 2C) = true \end{cases}$

Так как по условию $A \neq B$, то посылка в одном из оставшихся уравнений истинна, а в другом ложна. Предположим, что посылка истинна во втором уравнении системы. Тогда из истинности импликации следует истинность утверждения, т.е. выполняется неравенство $2C > A > B$. Но это противоречит исходным данным. Значит, и посылка и утверждение второго уравнения ложны, а в третьем уравнении – истинны. Но тогда выполняется неравенство $2C < A < B$ и A определяется однозначно.